

MEM und Wavelets

Maximum Entropy Entfaltung und Multiskalenanalyse

Patrick Kaster

`pkaster@mpifr-bonn.mpg.de`

Max-Planck-Institute for Radioastronomy

Bonn

MEM Methode



$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(h) - \alpha S(h)$$

MEM Methode



$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(h) - \alpha S(h)$$

- Bestrafung der “Härte” des Fits durch Entropiefunktion $S(h)$

MEM Methode



$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(h) - \alpha S(h)$$

- Bestrafung der “Härte” des Fits durch Entropiefunktion $S(h)$
- Lösung soll möglichst “glatt” sein, da keine eindeutige Lösung existiert (Occam’s Razor)

MEM Methode



$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(h) - \alpha S(h)$$

- Bestrafung der “Härte” des Fits durch Entropiefunktion $S(h)$
- Lösung soll möglichst “glatt” sein, da keine eindeutige Lösung existiert (Occam’s Razor)
- Wahl von $S(h)$ stark Problemabhängig

MEM Methode



$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(h) - \alpha S(h)$$

- Bestrafung der “Härte” des Fits durch Entropiefunktion $S(h)$
- Lösung soll möglichst “glatt” sein, da keine eindeutige Lösung existiert (Occam’s Razor)
- Wahl von $S(h)$ stark Problemabhängig
- Regularisierungsparameter α zur Steuerung zwischen bestem Fit - größter Weichheit

MEM Methode

- Maisinger et al. [1]: MEM in Wavelet Basis, um Rauschen zu kontrollieren

Wavelet Transformation

kurze Einführung in die
Wavelet Transformation
und Multiskalenanalyse

Wavelets und Fourier-Transformation

FT:

Wavelets und Fourier-Transformation

FT:

- globale Frequenzanalyse des Signals

Wavelets und Fourier-Transformation

FT:

- globale Frequenzanalyse des Signals
- lokale Eigenschaften bleiben unberücksichtigt

Wavelets und Fourier-Transformation

FT:

- globale Frequenzanalyse des Signals
- lokale Eigenschaften bleiben unberücksichtigt
- Bilder tragen Information im Orts- und Frequenzraum

Wavelets und Fourier-Transformation

FT:

- globale Frequenzanalyse des Signals
- lokale Eigenschaften bleiben unberücksichtigt
- Bilder tragen Information im Orts- und Frequenzraum

daher:

Wavelets und Fourier-Transformation

FT:

- globale Frequenzanalyse des Signals
- lokale Eigenschaften bleiben unberücksichtigt
- Bilder tragen Information im Orts- und Frequenzraum

daher:

- “gefensterte” FT

Wavelets und Fourier-Transformation

FT:

- globale Frequenzanalyse des Signals
- lokale Eigenschaften bleiben unberücksichtigt
- Bilder tragen Information im Orts- und Frequenzraum

daher:

- “gefensterte” FT
- CWT durch Basisfunktionen mit günstigem Orts- / Frequenzraum Auflösungsverhältnis

Definition STFT

Short *Time Fourier Transform*

- Signal $s(t)$

Definition STFT

Short *Time Fourier Transform*

- Signal $s(t)$
- Fensterfunktion $g(t)$ um Zeitpunkt τ

Definition STFT

Short *Time Fourier Transform*

- Signal $s(t)$
- Fensterfunktion $g(t)$ um Zeitpunkt τ
- Frequenz ω

Definition STFT

Short *Time Fourier Transform*

- Signal $s(t)$
- Fensterfunktion $g(t)$ um Zeitpunkt τ
- Frequenz ω

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega, \tau}(t) = g(t - \tau)e^{-i\omega t}$

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega, \tau}(t) = g(t - \tau)e^{-i\omega t}$
- ersetze Zeitpunkt τ durch Positionsparameter b

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega,b}(t) = g(t - b)e^{-i\omega t}$
- ersetze Zeitpunkt τ durch Positionsparameter b

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}g\left(\frac{t-b}{a}\right)e^{-i\omega t}$
- ersetze Zeitpunkt τ durch Positionsparameter b
- führe Fenstergröße a antiproportional zur Frequenz ω ein

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}g\left(\frac{t-b}{a}\right)e^{-i\omega t}$
- ersetze Zeitpunkt τ durch Positionsparameter b
- führe Fenstergröße a antiproportional zur Frequenz ω ein
- betrachte “Mutter Wavelet” ψ statt Fensterfunktion

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)$
- ersetze Zeitpunkt τ durch Positionsparameter b
- führe Fenstergröße a antiproportional zur Frequenz ω ein
- betrachte “Mutter Wavelet” ψ statt Fensterfunktion

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)$
- ersetze Zeitpunkt τ durch Positionsparameter b
- führe Fenstergröße a antiproportional zur Frequenz ω ein
- betrachte “Mutter Wavelet” ψ statt Fensterfunktion

$$CWT_{a,b}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

von der STFT zur CWT

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

- betrachte neue Basis $k_{\omega,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)$
- ersetze Zeitpunkt τ durch Positionsparameter b
- führe Fenstergröße a antiproportional zur Frequenz ω ein
- betrachte “Mutter Wavelet” ψ statt Fensterfunktion

$$CWT_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Definition CWT

Morlet-Grossmann (1984):

$$W_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) dx$$

$$\widehat{W}_{a,\nu}(\nu) = \sqrt{a} \widehat{f}(\nu) \widehat{\psi}^*(a, \nu)$$

- Skalenparameter a
- Positionsparameter b
- ψ analysierendes Wavelet

inverse CWT

Rekonstruktion des Signals:

$$f(x) = \frac{1}{C_\chi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{a}} W(a, b) \chi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}$$

inverse CWT

Rekonstruktion des Signals:

$$f(x) = \frac{1}{C_\chi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{a}} W(a, b) \chi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}$$

mit

$$C_\chi = \int_0^\infty \frac{\hat{\psi}^*(\nu) \hat{\chi}(\nu)}{\nu} d\nu = \int_{-\infty}^0 \frac{\hat{\psi}^*(\nu) \hat{\chi}(\nu)}{\nu} d\nu$$

inverse CWT

Rekonstruktion des Signals:

$$f(x) = \frac{1}{C_\chi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{a}} W(a, b) \chi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}$$

mit

$$C_\chi = \int_0^\infty \frac{\hat{\psi}^*(\nu) \hat{\chi}(\nu)}{\nu} d\nu = \int_{-\infty}^0 \frac{\hat{\psi}^*(\nu) \hat{\chi}(\nu)}{\nu} d\nu$$

- generell $\chi(x) = \psi(x)$, Verbesserung einiger Eigenschaften bei bestimmten Anwendungen durch etwaige abweichende Wahl von $\chi(x)$

Morlet's Wavelet

Realteil:

$$g_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(2\pi\nu_0 x)$$

Imaginärteil:

$$g_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(2\pi\nu_0 x)$$

Morlet's Wavelet

Realteil:

$$g_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(2\pi\nu_0 x)$$

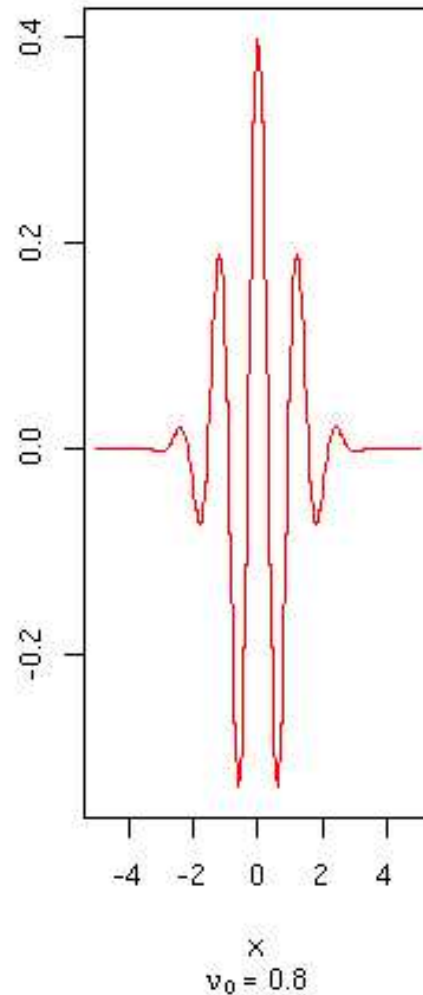
Imaginärteil:

$$g_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(2\pi\nu_0 x)$$

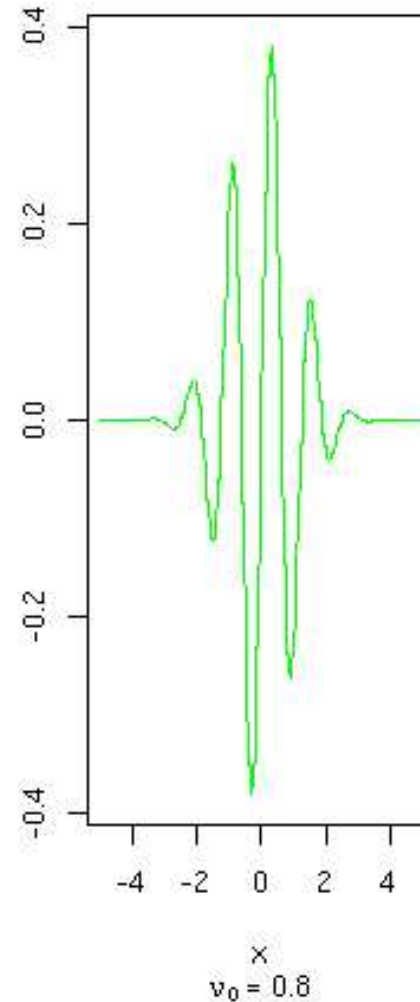
- ν_0 Modulationsparameter

Morlet's Wavelet

Morlet's wavelet real part



Morlet's wavelet imaginary part



Mexican Hat Wavelet

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

Mexican Hat Wavelet

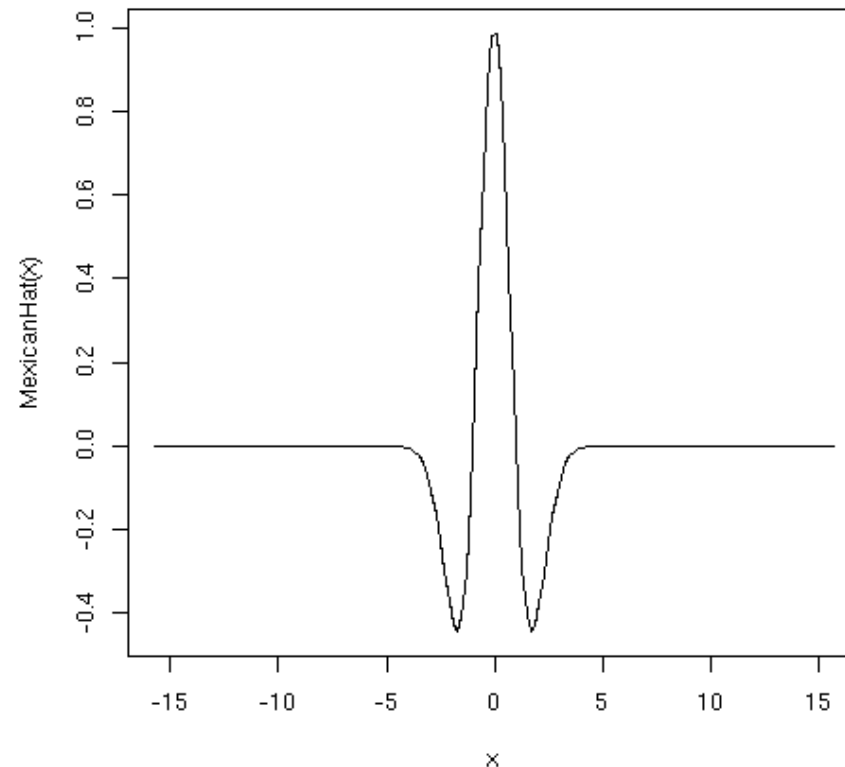
$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

- zweite Ableitung der Gaußfunktion

Mexican Hat Wavelet

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

- zweite Ableitung der Gaußfunktion



Haar Wavelet

Stufenfunktion als Orthonormalbasis:

$$\psi(x) = 1 \quad \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\psi(x) = -1 \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$\psi(x) = 0 \quad \text{sonst}$$

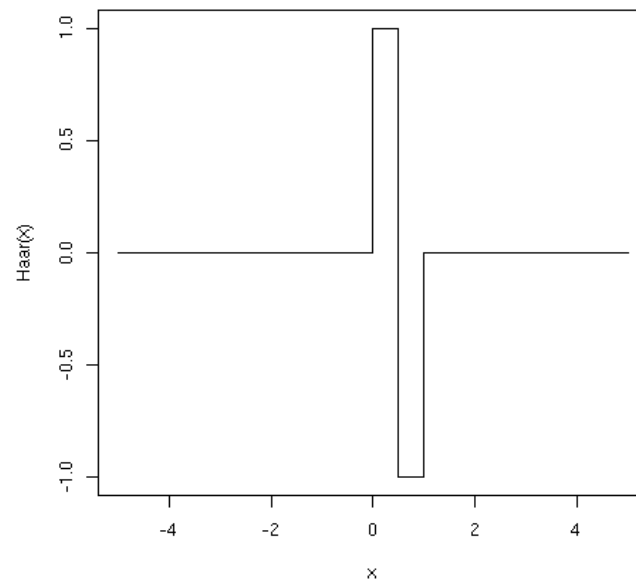
Haar Wavelet

Stufenfunktion als Orthonormalbasis:

$$\psi(x) = 1 \quad \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\psi(x) = -1 \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$\psi(x) = 0 \quad \text{sonst}$$



Daubechies Wavelet Construction Engine

$$W_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{t - b}{a} \right) dt$$

- Daubechies 1992: Wavelet Transformation wird durch Skale a und Position b parametrisiert

Daubechies Wavelet Construction Engine

- Daubechies 1992: Wavelet Transformation wird durch Skale a und Position b parametrisiert

Daubechies Wavelet Construction Engine

- Daubechies 1992: Wavelet Transformation wird durch Skale a und Position b parametrisiert
- wähle festes a_0 und b_0 (und $b \sim a$)

Daubechies Wavelet Construction Engine

- Daubechies 1992: Wavelet Transformation wird durch Skale a und Position b parametrisiert
- wähle festes a_0 und b_0 (und $b \sim a$)
- Wavelets sind Dilatationen und Translationen eines Mutterwavelets ψ (Wavelets der 1. Generation)

Daubechies Wavelet Construction Engine

- Daubechies 1992: Wavelet Transformation wird durch Skale a und Position b parametrisiert
- wähle festes a_0 und b_0 (und $b \sim a$)
- Wavelets sind Dilatationen und Translationen eines Mutterwavelets ψ (Wavelets der 1. Generation)

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}(x - nb_0 a_0^m))$$

Daubechies Wavelet Construction Engine

- Daubechies 1992: Wavelet Transformation wird durch Skale a und Position b parametrisiert
- wähle festes a_0 und b_0 (und $b \sim a$)
- Wavelets sind Dilatationen und Translationen eines Mutterwavelets ψ (Wavelets der 1. Generation)

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}(x - nb_0 a_0^m))$$

- das Haar-Wavelet ergibt sich daraus für $a_0 = 2, b_0 = 1$. Der kompakte Träger des Wavelets $\psi_{m,n}$ ist damit $[2^m n, 2^m(n + 1)]$

Mallat's horizontale und vertikale Analyse

- Wahl einer nach zwei Variablen separablen Skalierungsfuntion

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

Mallat's horizontale und vertikale Analyse

- Wahl einer nach zwei Variablen separablen Skalierungsfuntion

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

- dadurch Bevorzugung einer Richtung möglich

Mallat's horizontale und vertikale Analyse

- Wahl einer nach zwei Variablen separablen Skalierungsfunktion

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

- dadurch Bevorzugung einer Richtung möglich
- pro Skale drei unterschiedlich “gerichtete” Bilder durch Filterung mit drei “gerichteten” Wavelets

vertikales Wavelet: $\psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y)$

horizontales Wavelet: $\psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y)$

diagonales Wavelet: $\psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$

Beispiel Mallat Transformation

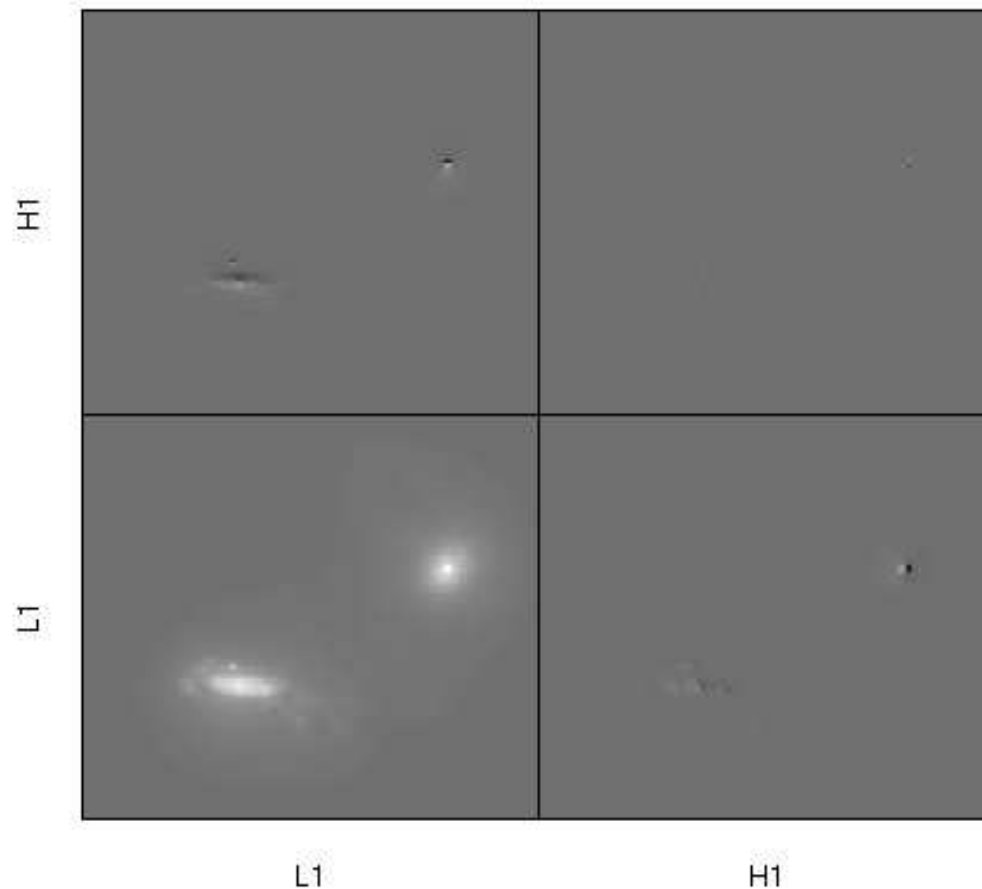
Objekt

MRK266 RA: 13:38:17.69 DEC: +48:16:33.9
STSCI MAST



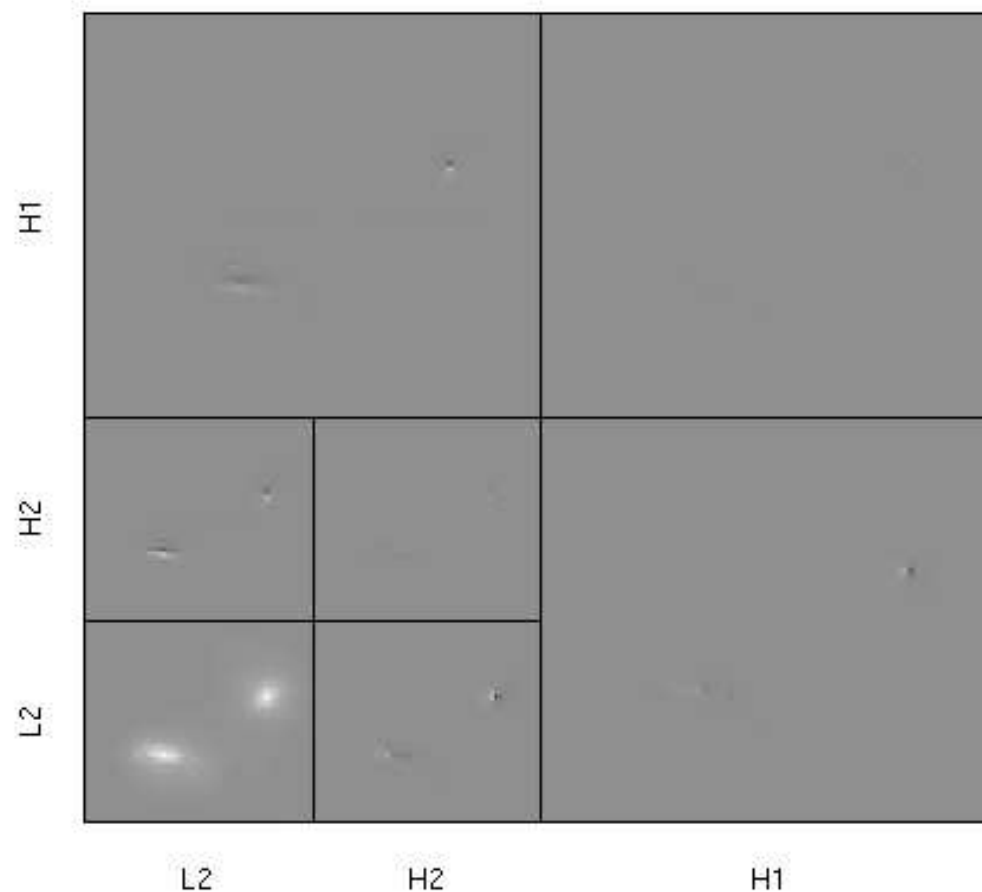
Beispiel Mallat Transformation

Haar Wavelet
3 Orientierungen, 1 Skala



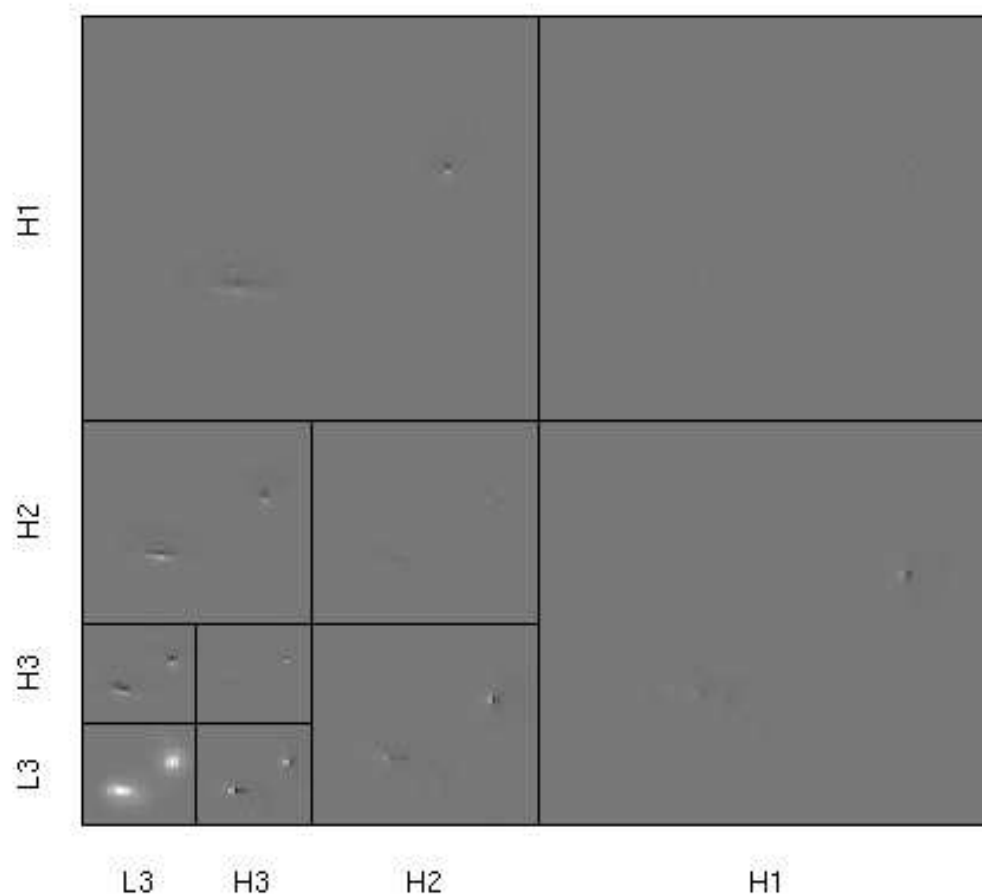
Beispiel Mallat Transformation

Haar Wavelet
3 Orientierungen, 2 Skalen



Beispiel Mallat Transformation

Haar Wavelet
3 Orientierungen, 3 Skalen



Wavelet Transformation

Prinzip MEM in einer Wavelet Basis

MEM in Wavelet Basis

- MEM im Waveletraum

$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(W(h)) - \alpha S(h)$$

MEM in Wavelet Basis

- MEM im Waveletraum

$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(W(h)) - \alpha S(h)$$

- Rücktransformation notwendig, in jedem Schritt, um Härte durch Entropie zu bestrafen

MEM in Wavelet Basis

- MEM im Waveletraum

$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(W(h)) - \alpha S(h)$$

- Rücktransformation notwendig, in jedem Schritt, um Härte durch Entropie zu bestrafen
- MEM Regularisierung im Waveletraum

$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(v) - \alpha S(W(v))$$

MEM in Wavelet Basis

- MEM im Waveletraum

$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(W(h)) - \alpha S(h)$$

- Rücktransformation notwendig, in jedem Schritt, um Härte durch Entropie zu bestrafen
- MEM Regularisierung im Waveletraum

$$F(h) = \frac{1}{2}\chi^2(v) - \alpha S(W(v))$$

- v ist das Wavelet “gefilterte” Bild

MEM in Wavelet Basis

- Kontrolle des Rauschens: Abschneiden von Waveletkoeffizienten, die als Rauschen betrachtet werden

MEM in Wavelet Basis

- Kontrolle des Rauschens: Abschneiden von Waveletkoeffizienten, die als Rauschen betrachtet werden
- Was ist “Rauschen”?

Ausblick: Erweiterung auf HMT Modell

- Jalobeanu, Kingsbury, Zerubia [2]: Wavelet Koeffizienten werden durch ein Hidden Markov Tree Modell über Skalenparameter als zusammengehörig identifiziert

Ausblick: Erweiterung auf HMT Modell

- Jalobeanu, Kingsbury, Zerubia [2]: Wavelet Koeffizienten werden durch ein Hidden Markov Tree Modell über Skalenparameter als zusammengehörig identifiziert
- verdecktes Gauss'sches Mixturmodell: Koeffizient trägt Information oder ist Rauschen

Ausblick: Erweiterung auf HMT Modell

- Jalobeanu, Kingsbury, Zerubia [2]: Wavelet Koeffizienten werden durch ein Hidden Markov Tree Modell über Skalenparameter als zusammengehörig identifiziert
- verdecktes Gauss'sches Mixturmodell: Koeffizient trägt Information oder ist Rauschen
- HMT Modell ist eventuell auf mehrere Eingabebilder mit ortsvarianter PSF erweiterbar

Literaturhinweise

Literatur

- [1] K. Maisinger, M. P. Hobson and A. N. Lasenby, *Maximum-entropy image reconstruction using wavelets*, 2004
- [2] A. Jalobeanu, N. Kingsbury, J. Zerubia, *Image deconvolution using Hidden Markov Tree modeling of complex wavelet packets*, 2001
- [3] J.-L. Starck, A. Bijaoui, F. Murtagh, *Image Processing and Data Analysis*, 1998
- [4] R.O. Duda, P.E. Hart, D.G. Stork, *Pattern Classification*, 2000

Hinweis auf MAST Nutzung

Some of the data presented in this talk were obtained from the Multimission Archive at the Space Telescope Science Institute (MAST). STScI is operated by the Association of Universities for Research in Astronomy, Inc., under NASA contract NAS5-26555. Support for MAST for non-HST data is provided by the NASA Office of Space Science via grant NAG5-7584 and by other grants and contracts.